熔盐堆流体动力学模型降阶方法适用性分析

林铭[1]　程懋松[1,2]　蔡翔舟[1,2] 戴志敏[1,2]
1（中国科学院上海应用物理研究所　上海　201800）
2（中国科学院大学　上海　201800）

摘要　对于熔盐堆全堆高保真流体动力学计算，即使借助超级计算机的并行计算能力在面对快速甚至实时求解的问题仍然面临效率的巨大挑战，引入和采用模型降阶方法（Reduced Order Modeling，ROM），将能够有效解决这类问题。基于本征正交分解方法（Proper Orthogonal Decomposition, POD）与 Galerkin 投影法，引入基于有限体积的模型降阶方法（ROM based on Finite Volume approximation，FV-ROM）和上确界稳定模型降阶方法（ROM with supremizer stabilization，SUP-ROM），针对液态燃料熔盐堆(Liquid Fuel Molten Salt Reactor，LFMSR)层流和湍流瞬态工况开展适用性分析。结果表明，FV-ROM 方法在速度误差和计算效率方面占有明显优势，层流和湍流瞬态速度平均 L2 相对误差低于 0.5%和 0.6%，且单步长的加速比分别为 1500 和 1000 倍左右；相比之下，SUP-ROM 方法在压力预测方面表现出显著的优势，层流和湍流瞬态压力平均 L2 相对误差低至 0.20%和 0.38%。因此，通过 FV-ROM 和 SUP-ROM 两种方法相结合的方式进行熔盐堆流体动力学速度场和压力场预测，能够更加有效地提高流体动力学仿真的效率和确保瞬态模拟过程计算可靠性和精确度。

关键词　模型降阶，熔盐堆，FV-ROM，SUP-ROM，流体动力学
中图分类号　TL33（建议原子能技术类的中图分类号）
DOI:

Applicability analysis of reduced order modeling methods for fluid dynamics in molten salt reactor

LIN Ming[1] CHENG Maosong[1,2] DAI Zhimin[1,2] CAI Xiangzhou[1,2]
1(Shanghai Institute of Applied Physics, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800, China)
2(University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract　**[Background]**: For high-fidelity simulations of fluid dynamics in molten salt reactor, even though a supercomputer is able to suppress the period of each simulation, the consequent expense is still prohibitively costly. A possible way to overcome this limitation is the use of Reduced Order Modelling (ROM) techniques. **[Purpose]**: Evaluating the accuracy of the ROM methods for reconstructing the velocity and pressure fields. [**Methods]**:　Two ROM methods based on the Proper Orthogonal Decomposition (POD) with both Galerkin projection, namely FV-ROM (ROM based on Finite Volume approximation) and SUP-ROM (ROM with supremizer stabilization), are established for fluid dynamics of molten salt reactor. Then, both methods are tested on the unsteady cases of liquid-fueled molten salt reactor (LFMSR). **[Results]**: The FV-ROM demonstrates notable advantages in both velocity prediction and computational efficiency. For laminar and turbulent transient simulations, the average velocity L2 relative errors are less than 0.5% and 0.6%, respectively, with acceleration ratios of approximately 1500 and 1000 times for single time steps. Conversely, the SUP-ROM scheme demonstrates significant prowess in pressure prediction, achieving remarkably low pressure average L2 relative errors of

---

中国科学院科技战略先导项目资助
第一作者：林铭，男，1989 年出生，2020 年于中国科学院大学获博士学位，研究领域为核反应堆模型降阶理论和算法研究
通讯作者：程懋松，E-mail: mscheng@sinap.ac.cn
收稿日期：20XX-00-00，修回日期：20XX-00-00

0.20% and 0.38% for laminar and turbulent transient scenario, respectively. [**Conclusions**]: The integration of the SUP-ROM and FV-ROM for fluid dynamics computations of molten salt reactor could significantly enhances computational efficiency and ensure reliability and accuracy of transient simulation.

Key words Reduced Order Modeling, Molten Salt Reactor, FV-ROM, SUP-ROM, fluid dynamics

对于熔盐堆全堆[1]高保真热工水力计算（经典的有限元方法、有限体积法和其他采用高分辨率网格的数值方法[2-5]），即使借助超级计算机的并行计算能力在面对需要多次求解，快速甚至实时求解的问题仍然面临效率的挑战。其求解效率必须要有 2–3 个数量级上的显著提升才能满足实际的需求。模型降阶（ROM）是一种能够保持精度的前提下巨幅提升大型工程计算效率的理论和方法[6]，因此将 ROM 应用于熔盐堆工程设计与分析计算（不确定性量化、设计优化和运行控制）具有重要意义。

模型降阶在航空工程、造船工程、汽车工程、土木工程等流体力学领域中应用特别广泛[7-10]，在核能系统领域近年来也有相应的应用。核能系统的介入式降阶方案中 POD-Galerkin 方法最具有代表性，如 German、Alberto 和 Xiang 等人利用 POD-Galerkin 方法解决带或不带温度反馈的中子扩散本征值的计算问题[11-14]；Min 等人利用 POD-Galerkin 对欧洲压水反应堆（EPR）燃料棒流致振动特性进行分析，Sartori 等人利用 POD-Galerkin 对铅快堆建立单通道的耦合模型，计算速度提高了至少三个数量级[15]；Lorenzi 等人采用 POD-Galerkin 方法建立了铅冷快堆 ALFRED 降阶模型，并模拟了 ALFRED 的瞬态工况[16]；陶阳等人利用 POD-Galerkin 方法模拟铅铋快堆事故过程中上静压室的温度分布，为确定热分层机制提供了一个分析工具[17]。

鉴于熔盐堆（包括了泵及换热器组件）这类复杂的非线性系统，对其建立流场动力学降阶模型还存在两个主要问题。首先，Galerkin 投影到的缩减基空间并不能保留原有的全阶动态特性[18]；其次，由于熔盐被近似成不可压缩流体，经过投影后的质量方程也具备了无散度的特性，造成单方程求解多变量的问题。为解决上述问题，Lorenzi 等人[19]提出在降阶过程中只求解动量方程，忽略压力梯度贡献的基于有限体积的降阶模型方法（FV-ROM），Ballarin 等人[20]提出添加额外速度模态来求解双方程的上确界稳定降阶模型方法（SUP-ROM）。

为分析和探讨 FV-ROM 与 SUP-ROM 两种模型降阶方法在熔盐堆流体动力学计算中的适用性问题，本文以开源 CFD 软件 OpenFOAM 为基本框架建立熔盐堆流体动力学全阶、FV-ROM 和 SUP-ROM 降阶模型，并通过 LFMSR (Liquid Fuel Molten Salt Reactor)[21]层流和湍流瞬态工况开展适用性分析和评估。

1 液态燃料熔盐堆全阶模型 FOM (Full Order Model)

由于液态熔盐堆熔盐可认为不可压缩流体，泵和换热器处理成多孔介质模型，由此可得到质量及动量方程：

$$\nabla \cdot \gamma \rho u = 0 \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\gamma \rho u \otimes u \right) = \nabla \cdot \left(\gamma \left(\eta + \eta_t \right) \left[\nabla u + \left(\nabla u \right)^T \right] \right) \\ - \gamma \nabla p + \gamma F_{pump} + \gamma F_f + \gamma \rho g_r \end{aligned} \tag{2}$$

其中，$\rho, u, p, \gamma, \eta, \eta_t$ 分别代表流体密度，速度，压力，是孔隙率，分子动力粘度和湍流粘度，上述可观察到当 $\gamma = 1$ 时，即为堆内部流体区域。F_{pump} 为泵体积力，F_f 为（泵或换热器）流阻，g_r 为重力矢量。根据达西速度 u_D 的定义可表示为：

$$u_D(r,t) \quad \gamma(r) u(r,t) \tag{3}$$

将式（3）带入式（1）和（2）可得到：

$$\nabla \cdot \rho u_D = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial \rho u_D}{\partial t}+\frac{1}{\gamma}\nabla\cdot\left(\rho u_D\otimes u_D\right)=\nabla\cdot\left(\left(\eta+\eta_t\right)\left[\nabla u_D+\left(\nabla u_D\right)^T\right]\right)\\ -\gamma\nabla p+\gamma F_{pump}+\gamma F_f+\gamma\rho g_r \tag{5}$$

熔盐堆属于闭环系统，在边界上速度采用齐次狄利克雷边界条件（$u_D=0$），压力采用诺伊曼边界条件 $\nabla p\cdot n=0$。

2 POD-Galerkin 方法

2.1 本征正交分解（POD）

建立低阶模型需要一组能够在数值特征上面代表原数据系统的基函数，流场内的速度可以分解成时间相关系数 $a(t)$ 乘以标准正交空间基 $\varphi^{u_D}(x)$ 的线性组合：

$$u_D(x,t)=\sum_{i=1}^{N_u}a_i(t)\varphi_i^{u_D}(x) \tag{6}$$

获取的缩减基可通过 POD（Proper Orthogonal Decomposition Proper），PGD（Generalized Decomposition Proper），贪婪 RB（Reduced Basis method）等方法[22-24]，本文采用的 POD 是一种将一组数值（在时间或参数空间中）压缩成一组较少模态方法，这些基能够能捕捉流场中最重要的信息。对于稳态的快照，根据所设定的参数范围 $\mu=\left(\mu_1,\mu_2\ldots\mu_N\right)$ 获取，快照总数为 N。对于瞬态快照，需选取 K 个时刻瞬态流场数据，因此其快照总数为 $N_s=N\times K$，可表示为：

$$R_u=\left[u\left(t_1,\mu_1\right)\quad\ldots\quad u\left(t_K;\mu_N\right)\right] \tag{7}$$

式中，R_u 为速度样本。速度的 POD 空间是通过解决以下优化问题构建的：

$$\mathrm{V}_{POD}=\arg\min\frac{1}{N_s}\sum_{n=1}^{N_s}\left\|u_n-\sum_{i=1}^{N_u}\left(u_n,\phi_i\right)_{L^2(\Omega)}\phi_i\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \tag{8}$$

式中，u_n 是速度场的快照，可以证明[25]，求解式（8）等价于求解如下特征值问题：

$$C^uV^u=V^u\lambda^u,\ (C^u)_{ij}=\left(u_i,u_j\right)_{L^2(\Omega)} \tag{9}$$

式中 C^u 是速度场快照矩阵的自相关矩阵，V^u 是特征向量，λ^u 为对角矩阵，其对角元素是特征值。并通过以下方式组合形成 POD 基模态，并类推出压力和湍流粘度 POD 模态[26]：

$$\varphi_i^{u_D}=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i^u}}\sum_{j=1}^{N_s}u_jV_{ij}^u,\ \varphi_i^p=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i^p}}\sum_{j=1}^{N_s}p_jV_{ij}^p,\ \varphi_i^{\eta_t}=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i^{\eta_t}}}\sum_{j=1}^{N_s}\eta_{t,j}V_{ij}^{\eta_t} \tag{10}$$

上式中符号上标 u,p,η_t 代表了速度，压力和湍流粘度。根据求解的特征值截断 POD 模态来近似速度，：

$$u_D(x,t)\approx\sum_{i=1}^{N_{u_D}}a_i(t,u)\varphi_i^{u_D}(x),\ \ p(x,t)\approx\sum_{i=1}^{N_p}b_i(t,u)\varphi_i^{\,p}(x),\ \ \eta_t(x,t)\approx\sum_{i=1}^{N_{\eta_t}}e_i(t,u)\varphi_i^{\,\eta_t}(x) \tag{11}$$

式中 a_i,b_i,e_i 分别代表速度，压力和湍流粘度的基模态系数，其中 N_u,N_p,N_f 远远小于 N_s。

2.2 Galerkin 投影

将 Navier-Stokes 方程在式（10）所得的 POD 张成模态空间上 Galerkin 投影，可以将高维的动力系统转换成低维的流动模型[27-29]，投影后的式（5）下可以写成以下公式：

$$\begin{cases}(\nabla\cdot\rho u_D,\nabla\varphi_i^p)_{L^2(\Omega)}=0\\ \left(\left(\dfrac{\partial\rho u_D}{\partial t}+\dfrac{1}{\gamma}\nabla\cdot\left(\rho u_D\otimes u_D\right)-\nabla\cdot\left(\left(\eta+\eta_t\right)\left[\nabla u_D+\left(\nabla u_D\right)^T\right]\right)+\gamma\nabla p-\gamma F_{pump}-\gamma F_f-\gamma\rho g_r,\ \varphi_i^{u_D}\right)\right)_{L^2(\Omega)}=0\end{cases} \tag{12}$$

将式（11）带入（12）中得到：

$$\begin{cases}Ma=0\\ \rho H\dot{a}+\rho a^T\overline{\overline{C}}a-e^T\overline{\overline{T}}a-\eta Da+Pb+\sum_{z=1}^{N_z}\left(S_{f,z}c_z-\left|F_{\text{pump},z}\right|S_{pump,z}\right)-\gamma\rho g_r=0\end{cases} \tag{13}$$

其中的运算符如下所示：

$$\begin{cases}M_{i,j}=\left\langle\varphi_i^p,\nabla\varphi_j^{u_D}\right\rangle_\Omega,\ H_{i,j}=\left\langle\varphi_i^{u_D},\varphi_j^{u_D}\right\rangle_\Omega,\ C_{i,j,k}=\left\langle\varphi_i^{u_D},\dfrac{1}{\gamma}\nabla\cdot\left(\varphi_j^{u_D}\otimes\varphi_k^{u_D}\right)\right\rangle_\Omega,P_{i,j}=\left\langle\varphi_i^{u_D},\gamma\nabla\varphi_j^p\right\rangle_\Omega,\\ \overline{\overline{T}}_{i,j,k}=\left\langle\varphi_i^{u_D},\nabla\cdot\left(\varphi_j^{\eta_t}\left[\nabla\varphi_k^{u_D}+\left(\nabla\varphi_k^{u_D}\right)^T\right]\right)\right\rangle_\Omega,\ D_{i,j}=\left\langle\varphi_i^{u_D},\nabla\cdot\left[\nabla\varphi_j^{u_D}+\left(\nabla\varphi_j^{u_D}\right)^T\right]\right\rangle_\Omega,\\ S_{pump,z,i}=\left\langle\varphi_i^{u_D},\gamma\dfrac{\delta_z(r)F_{pump,z}}{\left|F_{ppump,z}\right|}\right\rangle_\Omega,\ S_{f,z,i,j}=\left\langle\varphi_i^{u_D},\delta_z(r)\varphi_j^{F_{f,z}}\right\rangle_\Omega,\ A_i=\left\langle\varphi_i^{u_D},\gamma g\cdot r\right\rangle_\Omega\end{cases}$$

(14)

式中$\langle,\rangle$表示为内积，$\delta_z(r)$多孔介质区为 1，非多孔介质区为 0。需要指出的是，作为无散快照的线性组合，速度基函数也是无散的，这意味着矩阵 M 为 0，导致无法同时确定压力和速度模态系数，不满足 Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi[30]条件。为解决该问题，Lorenzi 等人引入 FV-ROM 方法即压力和湍流粘度场都遵循速度场的动力学原则[19]，因此速度，压力，湍流粘度场表示如下：

$$u_D(x,t)\approx\sum_{i=1}^{N_{u_D}}a_i(t,u)\varphi_i^{u_D}(x),\ \ p(x,t)\approx\sum_{i=1}^{N_p}a_i(t,u)\varphi_i^{p}(x),\ \ \eta_t(x,t)\approx\sum_{i=1}^{N_{\eta_t}}q(t,u)\varphi_i^{\eta_t}(x) \tag{15}$$

其中基模态可表示为：

$$\varphi_i^{u_D}=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i^u}}\sum_{j=1}^{N_u}u_jV_{ij}^u,\ \varphi_i^p=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i^u}}\sum_{j=1}^{N_u}p_jV_{ij}^u,\ \varphi_i^{\eta_t}=\frac{1}{\sqrt{\lambda_i^u}}\sum_{j=1}^{N_u}\eta_{t,j}V_{ij}^u \tag{16}$$

将上式代入式（13）中，只需求解模态系数$a_i(t,u)$即可。

Ballarin[20]等人提出添加额外模态到速度基模态中的 SUP-ROM 方法，该方法使矩阵 M 为不为 0，由此可获得两组方程求解压力及速度的模态系数。额外模态的快照是通过引入泊松方程进行计算的：

$$\Delta s_i=-\nabla p_i \qquad i=1,\ldots,N_s \tag{17}$$

其中，压力快照是已知值，加入边界条件（$s_{wall}=0$）即可以求解。保存上式的快照$R_s=\left[s_1,\ldots,s_{N_s}\right]$，根据 POD 方法求解特征值，通过式（11）计算并提取特征值较大的几个模态，将其加入到式（10）的速度模态$\varphi_i^{u_D}$中，使缩减基空间中速度不具备无散度的特性。文章中流阻模态系数c_z和湍流模态系数e分别通过离散经验插值和径向基函数方法获取的[31-32]。

2.3 在线求解及误差统计

模型降阶计算流程如图 1 所示，分为离线阶段和在线阶段。离线阶段包括快照生成和模态获取等步骤，而在线阶段则首先执行降阶方程的算子矩阵组装，随后求解代数方程组式（13），最后利用式（11）重构流场。

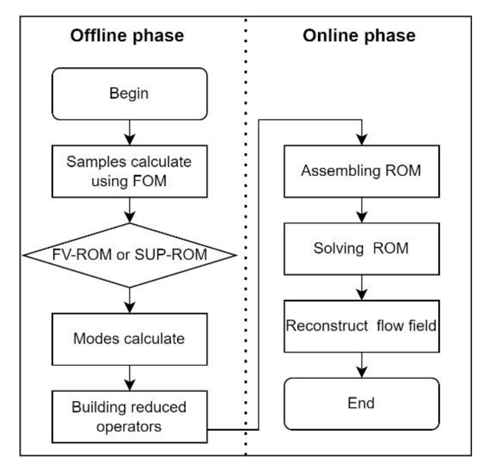


图 1 模型降阶计算流程图

Fig. 1 Flow chart of construction of ROM

为衡量 ROM 的准确性，采用相对全局 L2 误差作为指标，因此速度和压力误差可表示为：

$$e_u = \frac{\left\| u_{FOM} - u_{ROM} \right\|_{L^2,\Omega}}{\left\| u_{FOM} \right\|_{L^2,\Omega}}, \qquad e_p = \frac{\left\| p_{FOM} - p_{ROM} \right\|_{L^2,\Omega}}{\left\| p_{FOM} \right\|_{L^2,\Omega}}, \tag{18}$$

为统计时间步长上的速度和压力相对全局 L2 误差平均值，定义:

$$\overline{e}_u = \frac{1}{N_{T_s}} \sum_{i=1}^{N_{T_s}} e_{u,i}, \qquad \overline{e}_p = \frac{1}{N_{T_s}} \sum_{i=1}^{N_{T_s}} e_{p,i} \tag{19}$$

3 LFMSR 流体动力学降阶模型分析

LFMSR 是一种液态燃料熔盐快堆[21]，设计的热功率为 800MW，有八个回路，每个回路由三个主要部件组成：堆芯、泵和换热器。一回路几何和网格结构如图 2 所示，表 1 列出了使用的熔盐物性参数，换热器孔隙率设定为 0.5。泵作为动量源位置放在回路下方，液态燃料流动的方向是自下而上，网格共划分了 44770 单元。全阶模型的计算是在处理器为 Intel®Core™ i5-12500H, 主频为 2.50 GHz 的 PC 机上进行，本文各全阶算例均采用 8 核并行计算。

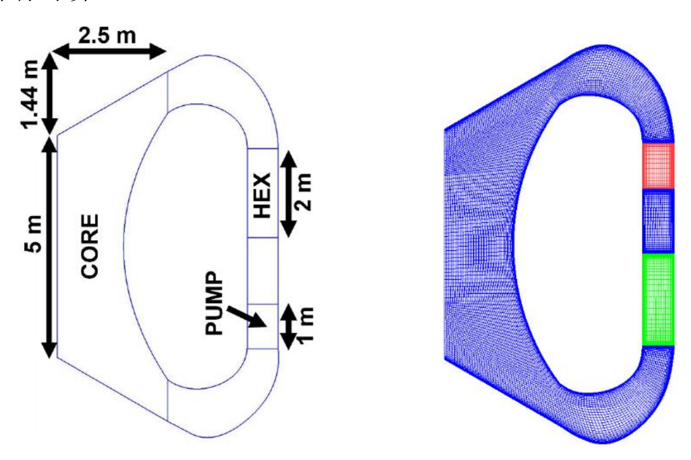


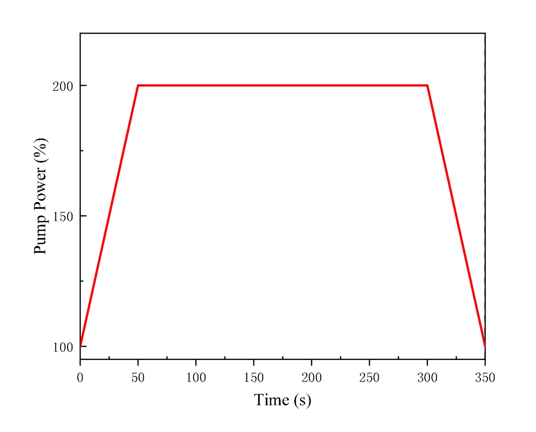
图 2 LFMSR 一回路 (a) 几何模型， (b) 二维网格

Fig.2 LFMSR primary loop (a) geometry, (b) 2D spatial mesh

表 1 LFMSR 热物性参数

Table 1 LFMSR Thermophysical

参数 Parameter name	参数值 Parameter value	参数 Parameter name	参数值 Parameter value
密度 Density / kg·m^{-3}	4200	热膨胀系数 Thermal expansion coefficient/K^{-1}	4.60E-4
热容 Specific heat/ J·kg^{-1}·K^{-1}	950	普朗特数 Prandtl number	2.945



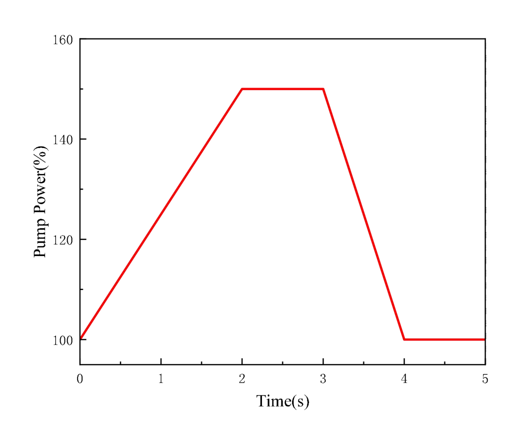
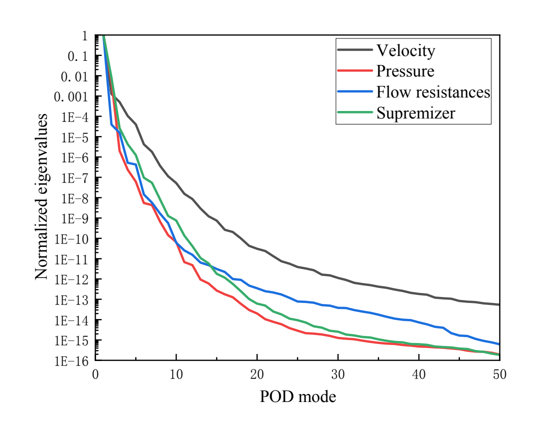


图 3 瞬态工况下功率变化 (a) 层流, (b) 湍流

Fig.3 Relative pumping power of the core for transient problems (a) Laminar, (b) Turbulence

图 3a 展示了 0-350s 层流工况下泵功率变化曲线，初始时刻泵动量源设置成 10Pa/m，每隔 5 秒获取一个快照共获取 70 个快照。图 3b 展示了 0-5s 湍流工况下泵功率变化曲线，初始时刻泵动量源设置成 20000Pa/m，每隔 0.05 秒获取一个快照共获取 100 个快照。图 4 为层流和湍流工况下压力、速度、流阻和 SUP 的模态特征值曲线，可以观察到层流工况下各流场模态能量衰减较为迅速，并且前 10 模态基本包含流场的大部分信息。湍流工况下湍流粘度和速度衰减较慢，因此需要选择更多的模态才能反映流场信息。



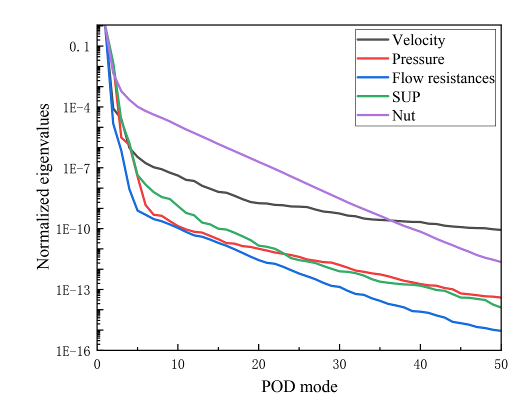
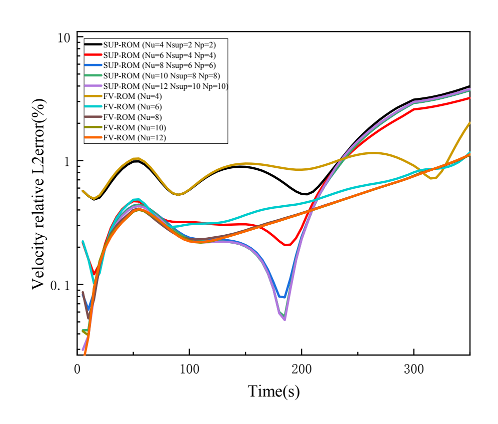


图 4 速度，压力和流阻的归一化模态特征值曲线 (a) 层流, (b) 湍流

Fig.4 The normalized eigenvalues of modal for velocity, pressure and flow resistance (a) Laminar, (b) Turbulence

3.1 层流工况结果分析



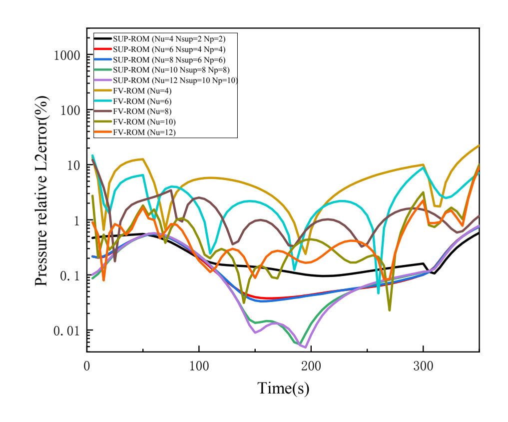


图 5 层流工况下不同模态下 FV-ROM 和 SUP-ROM 的 L2 相对误差 (a) 速度， (b) 压力

Fig.5 L2 norm relative error of FV-ROM and SUP-ROM in different modes at laminar scenario (a) Velocity, (b) Pressure

降阶模型的计算量通常与所采用的模态数量成正比，但不意味着计算精度会随之提升，因此，评估 FV-ROM 和 SUP-ROM 方法在使用不同模态数下的性能表现显得尤为重要。图 5 展示了在层流工况下不同模态数量下的 L2 相对误差，其中 Nu、Nsup 和 Np 分别表示所选择的速度、SUP 和压力的模态数量。FV-ROM 对比了 5 种速度模态数。当速度模态数大于 8 时速度误差基本重合，速度模态数越大压力误差有所减少，但都呈现了一种不稳定的趋势。SUP-ROM 对比了 5 组模态数，除了第一组所选模态累积能量占比过低导致预测的速度误差较大，后四组随着 SUP 模态数增大速度的平均误差和最大误差也在扩大，其主要原因是添加了额外 SUP 模态而偏离了原有的物理模型，SUP 模态的增多反而对速度的预测造成不利的影响。通过图 5b 发现，在使用最大模态组时，虽然在 200s 附近压力会出现一个非常小的误差，仅为 0.005%，但从平均误差和最大误差的角度来看，这三组模态数之间的差异并不显著。

表 3 为不同模态下速度和压力平均 L2 相对误差及最大 L2 相对误差，通过综合对比，本文选取的 FV-ROM 的 Nu 为 10，SUP-ROM 为 Nu=10、Nsup=8 和 Np=6，并将两者的的结果进行对比分析。对于速度场预测，SUP-ROM 平均误差为 1.037%高于 FV-ROM 的 0.444%，最大误差分别为 3.704%和 1.110%。对于压力场的预测，从图 5b 中可以直观看到 SUP-ROM 的显著优势，误差保持在 0.78%以下，FV-ROM 只有某些时刻点上预测精度接近于 SUP-ROM。

表 3 速度和压力平均 L2 相对误差 $\overline{e}$ 及最大 L2 相对误差 $e_{\max}$

Table 3 Velocity and Pressure average L2 norm error and max L2 norm error

降阶方法 ROM method	POD 模态数 POD modes	$\overline{e}_u / e_{u,\max}$ (%)	$\overline{e}_p / e_{p,\max}$ (%)
FV-ROM	Nu=4	0.904/2.021	5.932/22.362
	Nu=6	0.504/1.164	2.941/14.65
	Nu=8	0.448/1.117	1.482/12.176
	Nu=10	0.444/1.110	0.865/10.046
	Nu=12	0.444/1.124	0.747/8.985
SUP-ROM	Nu=4 Nsup=2 Np=2	1.385/3.985	0.241/0.579
	Nu=6 Nsup=4 Np=4	0.982/3.206	0.197/0.753
	Nu=8 Nsup=6 Np=6	1.034/3.698	0.197/0.745
	Nu=10 Nsup=8 Np=8	1.037/3.704	0.187/0.778
	Nu=12 Nsup=10 Np=10	1.048/3.778	0.188/0.778

前文中分析的 L2 相对误差只是全局指标，我们给出了速度和压力在瞬态模拟结束 350s 时的绝对误差

如图 6 所示。可以看出，在 350s 时，FV-ROM 和 SUP-ROM 预测的最大的速度误差都出现在堆芯出口处附近，两者的速度误差分布基本类似，但 FV-ROM 的最大绝对误差远远小于 SUP-ROM。FV-ROM 较大的压力误差集中在泵和换热器区域附近，而 SUP-ROM 在堆芯出口处且范围小。

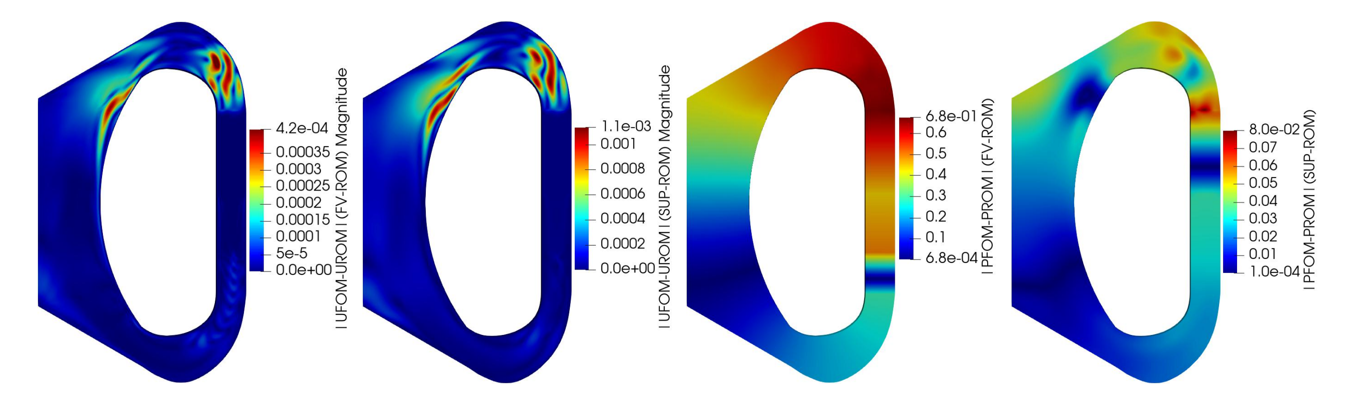


图 6 350s 时 FV-ROM 与 SUP-ROM 速度和压力绝对误差

(a) 速度（FV-ROM）， (b) 速度（SUP-ROM） (c) 压力（FV-ROM）， (b) 压力（SUP-ROM）

Fig.6 Absolute error of velocity and pressure field between FV-ROM and SUP-ROM at 200s

(a) Velocity (FV-ROM), (b) Velocity (SUP-ROM), (c) Pressure (FV-ROM), (d) Pressure (SUP-ROM)

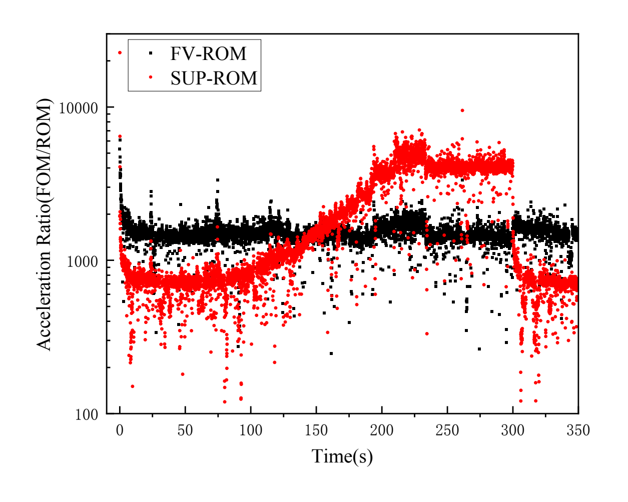
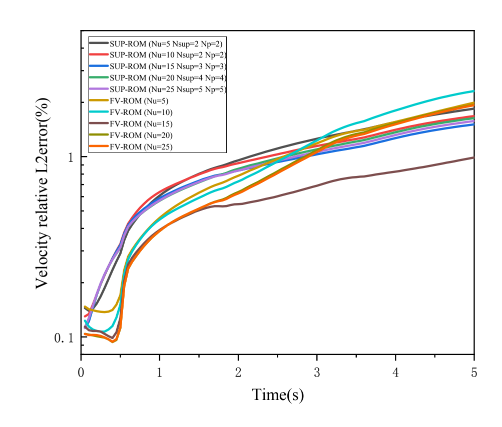


图 7 单个步长时间加速比

Fig.7 Single step time acceleration ratio

图 7 为整个层流瞬态工况下每个时间步 FV-ROM 和 SUP-ROM 的加速比。FV-ROM 比较稳定在 1500 倍左右，总体上其加速比是优于 SUP-ROM。SUP-ROM 波动较大，主要原因是 SUP-ROM 在泵功率平稳阶段迭代收敛速度更快。

3.2 湍流工况结果分析



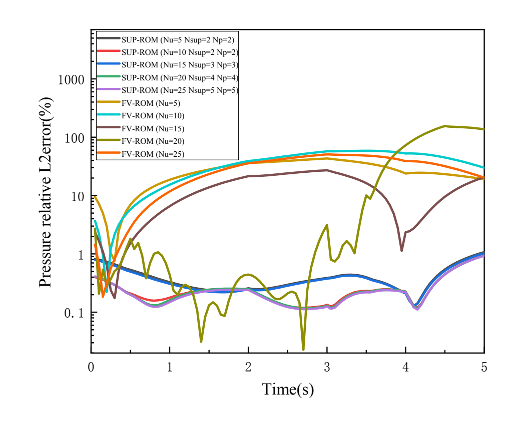


图 8　湍流工况下不同模态下 FV-ROM 和 SUP-ROM 的 L2 相对误差　(a) 速度，　(b) 压力

Fig.8　L2 norm relative error of FV-ROM and SUP-ROM in different modes at turbulent scenario　(a) Velocity,　(b) Pressure

为了评估在湍流工况下 FV-ROM 与 SUP-ROM 方法使用不同模态的表现，同样对比 5 组模态数，其速度和压力的 L2 相对误差如图 8 所示。观察到 FV-ROM 速度模态数为 15 时速度误差基本保持在 1%以下，当模态数大于 20 时速度误差有所增大，压力在 3.5s 后出现明显的偏差，误差最高达到 100%以上。当 SUP-ROM 采用模态组合为（Nu=15 Nsup=3 Np=3）时，速度预测是最准确的，压力误差略高于其他模态组但都低于 1.03%。

表 4 为不同模态下平均 L2 相对误差及最大 L2 相对误差，通过综合对比，本文选取的 FV-ROM 的 Nu 为 15，SUP-ROM 为 Nu=15 Nsup=3 Np=3，并将两者的的结果进行对比分析。在速度预测上，FV-ROM 的平均 L2 相对误差为 0.599%低于 SUP-ROM 的 0.914%。在压力的预测上，SUP-ROM 平均 L2 相对误差为 0.387%，最大的误差不超过 1.1%，SUP-ROM 表现出显著的优势。

表 4　速度和压力平均 L2 相对误差 $\bar{e}$ 及最大 L2 相对误差 $e_{\max}$

Table 4　Velocity and Pressure average L2 norm error and max L2 norm error

降阶方法 ROM method	POD 模态数 POD modes	$\bar{e}_u / e_{u,\max}$ (%)	$\bar{e}_p / e_{p,\max}$ (%)
FV-ROM	Nu=5	1.008/1.993	27.595/43.227
	Nu=10	1.085/2.312	36.628/58.602
	Nu=15	0.599/0.989	13.217/27.148
	Nu=20	0.933/1.939	30.938/155.336
	Nu=25	0.920/1.929	29.935/50.816
SUP-ROM	Nu=5 Nsup=2 Np=2	1.075/1.847	0.406/1.071
	Nu=10 Nsup=2 Np=2	1.007/1.679	0.263/0.945
	Nu=15 Nsup=3 Np=3	0.914/1.510	0.387/1.027
	Nu=20 Nsup=4 Np=4	0.959/1.636	0.259/0.938
	Nu=25 Nsup=5 Np=5	0.934/1.576	0.253/0.933

速度和压力在瞬态模拟结束 5s 时的绝对误差如图 9 所示。可以看出，FV-ROM 和 SUP-ROM 预测的较大的速度误差都集中在堆芯下方，并且范围不广泛，两者的速度误差分布基本类似。FV-ROM 预测的较大的压力误差都集中在泵和换热器区域，SUP-ROM 则是在堆芯上部的极小的区域内，体现了 SUP-ROM 对于压力的预测是比较准确的。

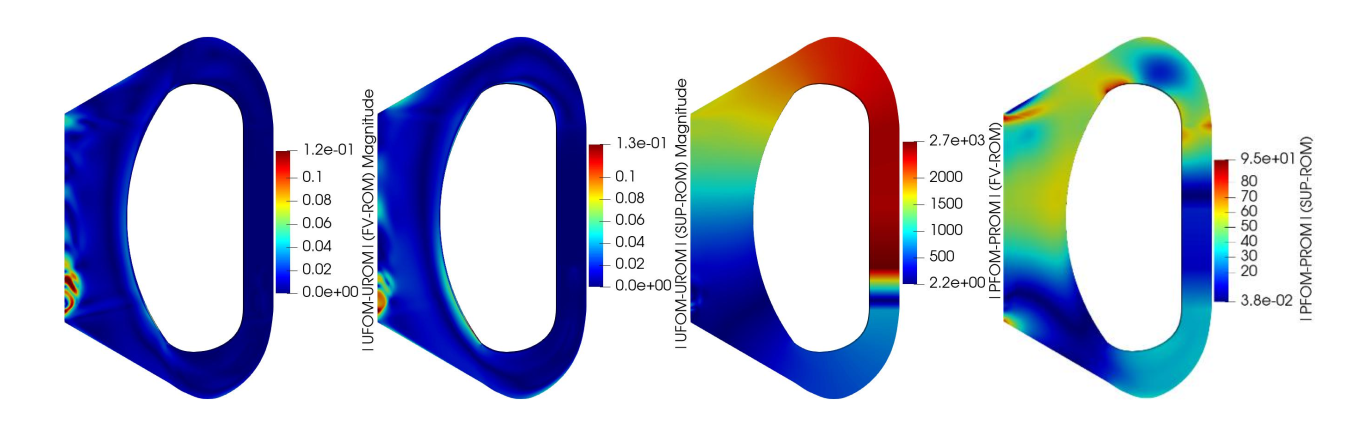


图 9　5s 时 FV-ROM 与 SUP-ROM 速度和压力绝对误差

(a) 速度（FV-ROM），　(b) 速度（SUP-ROM）　(c) 压力（FV-ROM），　(b) 压力（SUP-ROM）

Fig.5　Absolute error of velocity and pressure field between FV-ROM and SUP-ROM at 5s

(a) Velocity (FV-ROM),　(b) Velocity (SUP-ROM),　(c) Pressure (FV-ROM),　(d) Pressure (SUP-ROM)

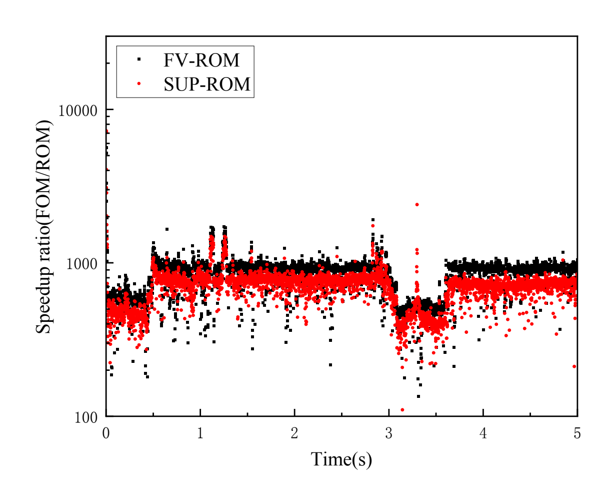


图 10　单个步长时间加速比

Fig.10　Single step time acceleration ratio

图 10 为整个湍流瞬态过程中每个时间步 FV-ROM 和 SUP-ROM 加速比，FV-ROM 加速比集中在 1000 左右，SUP-ROM 总体加速比在 800 左右低于 FV-ROM，其原因是 SUP-ROM 组装的算子矩阵较大，计算相对耗时。上述表明了在湍流瞬态工况下即使全阶模型采用了八核并行计算，降阶后加速比还是比较理想。

4　结语

针对熔盐堆流体动力学计算效率问题，引入了 FV-ROM 和 SUP-ROM 两种模型降阶方法，并以 LFMSR 层流和湍流的瞬态工况作为测试案例，详细分析了两种方法的流场和压力场预测性能和计算效率。数值计算结果表明，两种方法都能够显著提高计算效率，其中 FV-ROM 在适当的模态下能够提供更加精确的速度信息，而 SUP-ROM 则有助于更加准确地捕捉压力场的变化。因此，通过结合这两种方法，能够在保证熔盐堆流体动力学计算可靠性和精确度的情况下，显著提高流体动力学仿真效率，为熔盐堆流体动力学计算分析提供高效的理论和方法。

作者贡献声明　林铭负责建立全阶及降阶模型，数据分析及文章撰写；程懋松负责提出研究思路，对文

章的知识性内容作批评性审阅及文章修订；蔡翔舟负责研究进度监督，经费支持；戴志敏负责研究方案指导。

参考文献

1. 江绵恒,徐洪杰,戴志敏.未来先进核裂变能——TMSR 核能系统[J]. 中国科学院院刊, 2012, 27(3): 366-374.
   Jiang Mianheng, Xu Hongjie, Dai Zhimin. Advanced nuclear fission energy-TMSR nuclear energy systems [J]. Bulletin of Chinese Academy of Sciences, 2012, 27(3):366-374.
2. Lin M, Cheng M S, Dai Z M. Feasibility of an innovative long-life molten chloride-cooled reactor[J]. Nuclear Science and Techniques, 2020, 31(4): 33. DOI: 10.1007/ s41365-020-0751-7.
3. 宋诗阳,程懋松,林铭,等.基于 RELAP5 和子通道程序的熔盐冷却快堆多尺度热工流体耦合程序开发及应用[J].核技术, 2022(007):045. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2022.hjs.45.070602.
   SONG Shiyan, CHENG Maosong, LIN Ming, *et al*. Development and application of multi-scale thermal fluid coupling program for molten salt cooled fast reactor based on RELAP5 and sub-channel program[J]. Nuclear Techniques, 2022(007):045. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2022.hjs.45.070602.
4. 左献迪,程懋松,戴志敏.液态燃料熔盐堆三维动力学程序开发及验证[J].核技术, 2022, 45(3):9. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2022.hjs.45.030603.
   ZUO Xiandi, Development and validation of a three-dimensional dynamics code for liquid-fueled molten salt reactors[J]. Nuclear Techniques, 2022, 45(3):9. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2022.hjs.45.030603.
5. 魏泉,郭威,王海玲,等.熔盐堆物理热工耦合程序开发及验证分析[J].核技术, 2017, 40(10):100605. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2017.hjs.40.100605.
   WEI Quan, GUO Wei, WANG Hailing, et al. Develop and verify coupling program of the neutron physics and thermal hydraulic for MSR[J]. Nuclear Techniques, 2017, 40(10):100605. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2017.hjs.40.100605.
6. 朱耀麟,杨志海,陈西豪.模型降阶方法研究[J].微计算机信息, 2011, 27(6):22-25. DOI:10.3969/j.issn.2095-6835.2011.06.010.
   ZHU Yao-lin, YANG Zhi-hai, Chen Xi-hao. Investigation on the Methods of Model Reduction[J]. Microelectronics & Computer, 2011, 27(6): 22-25. DOI: 1008-0570(2011)05-0022-04. DOI: 10.3969/j.issn.2095-6835.2011.06.010.
7. Hijazi S, Stabile G, Mola A, et al. Data-driven POD-Galerkin reduced order model for turbulent flows[J]. Journal of Computational Physics, 2020, 416: 109513. DOI:10.1016/j.jcp.2020.109513.
8. Girfoglio M, Quaini A, Rozza G. A POD-Galerkin reduced order model for a LES filtering approach[J]. Journal of Computational Physics, 2021, 436: 110260. DOI: 10.1016/j.jcp.2021.110260.
9. Prusak I, Torlo D, Nonino M, et al. Optimisation--Based Coupling of Finite Element Model and Reduced Order Model for Computational Fluid Dynamics[J]. arXiv preprint arXiv:2402.10570, 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2402.10570.
10. Min G, Ma Y, Wang Y, et al. Flow fields prediction for data-driven model of 5× 5 fuel rod bundles based on POD-RBFNN surrogate model[J]. Nuclear Engineering and Design, 2024, 422: 113117. DOI: https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2024.113117.
11. German P, Ragusa J C. Reduced-order modeling of parameterized multi-group diffusion k-eigenvalue problems[J]. Annals of Nuclear Energy, 2019, 134: 144-157. DOI: 10.1016/j.anucene.2019.05.049
12. Prince Z M, Ragusa J C. Application of proper generalized decomposition to multigroup neutron diffusion eigenvalue calculations[J]. Progress in Nuclear Energy, 2020, 121: 103232. DOI:10.1016/j.pnucene.2019.103232.
13. German P, Ragusa J C, Fiorina C. Application of multiphysics model order reduction to doppler/neutronic feedback[J]. EPJ Nuclear Sciences & Technologies, 2019, 5(ARTICLE): 17. DOI:10.1051/epjn/2019034.
14. Xiang Z, Chen Q, Zhao P. Application of data-driven model reduction techniques in reactor neutron field calculations[J]. Nuclear Engineering and Technology, 2024. DOI: 10.1016/j.net.2024.02.055.
15. Sartori A, Cammi A, Luzzi L, et al. A multi-physics reduced order model for the analysis of Lead Fast Reactor single channel[J]. Annals of Nuclear Energy, 2016, 87: 198-208. DOI:10.1080/00207170410001713448. DOI:10.1016/j.pnucene.2019.103232.

16. Lorenzi S, Cammi A, Luzzi L, et al. A reduced order model for investigating the dynamics of the Gen-IV LFR coolant pool[J]. Applied Mathematical Modelling, 2017, 46: 263-284. DOI: 10.1016/j.apm.2017.01.066.
17. Yang T, Zhao P, Zhao Y, et al. Development of reduced-order thermal stratification model for upper plenum of a lead–bismuth fast reactor based on CFD[J]. Nuclear Engineering and Technology, 2023. DOI: 10.1016/j.net.2023.05.002.
18. Balajewicz M, Dowell E H. Stabilization of projection-based reduced order models of the Navier–Stokes[J]. Nonlinear Dynamics, 2012, 70: 1619-1632. DOI:10.1007/s11071-012-0561-5.
19. Lorenzi S, Cammi A, Luzzi L, et al. POD-Galerkin method for finite volume approximation of Navier–Stokes and RANS equations[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2016, 311: 151-179. DOI: 10.1016/j.cma.2016.08.006.
20. Ballarin F, Manzoni A, Quarteroni A, et al. Supremizer stabilization of POD–Galerkin approximation of parametrized steady incompressible Navier–Stokes equations[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2015, 102(5): 1136-1161. DOI: 10.1002/nme.4772.
21. Altahhan M R, Bhaskar S, Ziyad D, et al. Preliminary design and analysis of Liquid Fuel Molten Salt Reactor using multi-physics code GeN-Foam[J]. Nuclear Engineering and Design, 2020, 369: 110826. DOI:10.1016/j.nucengdes.2020.110826.
22. Schilders W H A, Van der Vorst H A, Rommes J. Model order reduction: theory, research aspects and applications[M].Berlin: springer, 2008.
23. Chinesta F, Ladeveze P, Cueto E. A short review on model order reduction based on proper generalized decomposition[J]. Archives of Computational Methods in Engineering, 2011, 18(4): 395-404. DOI: 10.1007/s11831-011-9064-7.
24. Dumon A, Allery C, Ammar A. Proper general decomposition (PGD) for the resolution of Navier–Stokes equations[J]. Journal of Computational Physics, 2011, 230(4): 1387-1407. DOI:10.1016/j.jcp.2010.11.010.
25. Stabile G, Hijazi S, Mola A, et al. POD-Galerkin reduced order methods for CFD using Finite Volume Discretisation: vortex shedding around a circular cylinder[J]. Communications in Applied and Industrial Mathematics, 2017, 8(1): DOI:210-236. 10.1515/caim-2017-0011.
26. Quarteroni A, Manzoni A, Negri F. Reduced basis methods for partial differential equations: an introduction[M]. Springer, 2015.
27. Moukalled F, Mangani L, Darwish M, et al. The finite volume method[M]. Springer International Publishing, 2016.
28. Iliescu T, Wang Z. Variational multiscale proper orthogonal decomposition: Navier - stokes equations[J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2014, 30(2): 641-663. DOI: 10.1002/num.21835.
29. Kunisch K, Volkwein S. Galerkin proper orthogonal decomposition methods for a general equation in fluid dynamics[J].SIAM Journal on Numerical analysis, 2002, 40(2): 492-515. DOI: 10.1137/S0036142900382612.
30. Gerner A L, Veroy K. Certified reduced basis methods for parametrized saddle point problems[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2012, 34(5): A2812-A2836. DOI: 10.1137/110854084.
31. Chaturantabut S, Sorensen D C. Nonlinear model reduction via discrete empirical interpolation[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2010, 32(5): 2737-2764. DOI: 10.1137/090766498.
32. Hijazi S, Ali S, Stabile G, et al. The effort of increasing Reynolds number in projection-based reduced order methods: from laminar to turbulent flows[J]. Numerical Methods for Flows: FEF 2017 Selected Contributions, 2020: 245-264. DOI: 10.1007/978-3-030-30705-9_22